平均自乗誤差

いま，物理量の真値をXとし，系統的誤差を完全になくしたあと，n回の直接測定によるその測定値をx_1，x_2，……，x_nとするとき，それらの算術平均値

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n} \tag{1}$$

がもっとも真値Xに近い値と考えられる。また，それぞれの測定値の誤差ε_1，ε_2……，ε_nは

$$\varepsilon_1=x_1-X,\quad \varepsilon_2=x_2-X,\quad \cdots\cdots,\quad \varepsilon_n=x_n-X \tag{2}$$

となり，これらの誤差の2乗の和の平均値

$$\mu^2=\frac{1}{n}(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots\cdots+\varepsilon_n^2) \tag{3}$$

を考え，その平方根μを平均自乗誤差と呼ぶ。それぞれの誤差が小さければ小さいほどμの値は小さくなるので，μが小さいほどこれら測定値の組は信頼してよいと考えられる。すなわち，μは各測定値の信頼度の評価を与えるものと考えてよいのである。
ところが，真値Xは知ることができないので，誤差ε_1，ε_2……，ε_nは計算することができない。したがって，平均自乗誤差も求められないので，そのため真値Xの代りに算術平均値 $\bar{x}$ を用い，誤差の代りに残差δ_1，δ_2，……，δ_nをつぎのように定義する。

$$\delta_1=x_1-\bar{x},\quad \delta_2=x_2-\bar{x},\quad \cdots\cdots,\quad \delta_n=x_n-\bar{x} \tag{4}$$

ガウスの誤差の理論によれば，nが十分に大きいところでは，式(3)で定義された平均自乗誤差μは上式の残差を用いて，

$$\mu^2=\frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots\cdots+\delta_n^2}{n-1} \tag{5}$$

のように計算される。ここで，分母がnでなく$n-1$であることに注意しよう。μは各測定値の信頼度を示す平均自乗誤差であり，n個の測定値の算術平均値$\bar{x}$は，それよりもさらにn倍も信頼してもよいと考えられるので，

$$\mu_m^2=\frac{\mu^2}{n}=\frac{\delta_1^2+\delta_2^2+\cdots\cdots+\delta_n^2}{n(n-1)} \tag{6}$$

をとり，μ_mを平均値の平均自乗誤差と定義する。すなわち，μ_mは算術平均値$\bar{x}$の信頼度を与えるのである。平均自乗誤差のことをまた標準偏差と呼ぶ。

【例題】針金の直径を測定して，つぎのような20個の測定値（単位mm）を得た。平均値およびその平均自乗誤差を求め，それらを表示せよ。

0.501，	0.502，	0.500，	0.497，	0.501，	0.507，	0.505，
0.499，	0.502，	0.501，	0.494，	0.505，	0.500，	0.501，
0.500，	0.502，	0.503，	0.501，	0.502，	0.503	

【解】 平均自乗誤差の計算は表のように計算すれば，間違いが少ないであろう。

平均自乗誤差の計算

測定回数	0.500からの差	残　差	残差の2乗×10^6
1	＋ 0.001	－ 0.0003	0.09
2	＋ 0.002	＋ 0.0007	0.49
3	0	－ 0.0013	1.69
4	－ 0.003	－ 0.0043	18.49
5	＋ 0.001	－ 0.0003	0.09
6	＋ 0.007	＋ 0.0057	32.49
7	＋ 0.005	＋ 0.0037	13.69
8	－ 0.001	－ 0.0023	5.29
9	＋ 0.002	＋ 0.0007	0.49
10	＋ 0.001	－ 0.0003	0.09
11	－ 0.006	－ 0.0073	53.29
12	＋ 0.005	＋ 0.0037	13.69
13	0	－ 0.0013	1.69
14	＋ 0.001	－ 0.0003	0.09
15	0	－ 0.0013	1.69
16	＋ 0.002	＋ 0.0007	0.49
17	＋ 0.003	＋ 0.0017	2.89
18	＋ 0.001	－ 0.0003	0.09
19	＋ 0.002	＋ 0.0007	0.49
20	＋ 0.003	＋ 0.0017	2.89
平均値	＋ 0.0013		$\Sigma=150.20\times10^{-6}$

すなわち，算術平均値は0.5013と求められる。
残差の2乗の和は150.2×10^{-6}であるから，μ_mは0.00063となる。
以上の結果を表現する場合に，平均値にその平均自乗誤差の値を付け加えて

$$0.50130\pm0.00063$$
（または0.5013 ± 0.0006）

間接測定における平均自乗誤差

物理量X，Y，Z，……を測定して

$$A=f(X,\ Y,\ Z,\ \cdots\cdots) \tag{7}$$

の関係式から物理量Aを求める実験はかなり多い。この測定を間接測定と呼ぶ。この測定において，Xの測定値を x_1，x_2，……，x_l，Yの測定値 をy_1，y_2，……，y_m，Zの測定値を z_1，z_2，……，z_n，……とし，それぞれの平均値を$\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{z}$，……とすれば，物理量Aのもっとも真値に近い値 a は次式から求められる。

$$a=f(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z},\ \cdots\cdots) \tag{8}$$

また，a の信頼度を示す平均自乗誤差μ_mは次式から計算される。

$$\mu_m^2=\left(\frac{\partial A}{\partial X}\right)^2\mu_{mx}^2+\left(\frac{\partial A}{\partial Y}\right)^2\mu_{my}^2+\left(\frac{\partial A}{\partial Z}\right)^2\mu_{mz}^2+\cdots\cdots \tag{9}$$

ここで，μ_{mx}，μ_{my}，μ_{mz}，……はそれぞれ式(6)から計算された平均値$\bar{x}$，$\bar{y}$，$\bar{z}$，……の平均自乗誤差である。式(9)は誤差の伝播法則と呼ばれている。
前節と同様に平均値 a に対しては，

$$a\pm\mu_m \tag{10}$$

のように表現する。