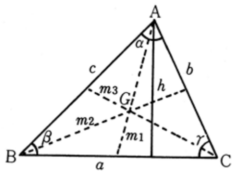
三角形の公式

辺の長さをa, b, c, それらに対する内角をα, β, γ, 中線の長さをm_1, m_2, m_3とし, $2s=a+b+c$, $2p=m_1+m_2+m_3$とおく。頂点Aと底辺BCとの距離(高さ)をhとする。



A. 正弦法則および余弦法則

正弦法則　$a/\sin\alpha = b/\sin\beta = c/\sin\alpha$

余弦法則　$a^2=b^2+c^2-2\,bc\cos\alpha$

$b^2=c^2+a^2-2\,ca\cos\beta$

$c^2=a^2+b^2-2\,ab\cos\gamma$

B. 内接円および外接円

内接円の半径　$r=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)/s}$

外接円の半径　$R=\frac{1}{2}a/\sin\alpha = \frac{1}{2}b/\sin\beta = \frac{1}{2}c/\sin\gamma$

C. 面　　積

$$S=\frac{ah}{2}=\frac{ab}{2}\sin\gamma=\frac{a^2}{2}\frac{\sin\beta\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha}=rs=\frac{abc}{4R}$$

$$=r^2\cot\frac{\alpha}{2}\cot\frac{\beta}{2}\cot\frac{\gamma}{2}=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{p(p-m_1)(p-m_2)(p-m_3)}$$

なお頂点A, B, Cの直角座標をそれぞれ(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)とすれば

$$S=\frac{1}{2}\left|(x_1y_2-x_2y_1)+(x_2y_3-x_3y_2)+(x_3y_1-x_1y_3)\right|$$

D. 重　　心

3中線の交点Gが重心であって, 各頂点より各中線の長さの2/3のところにある。したがって

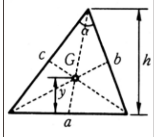
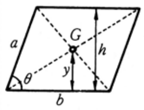
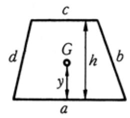
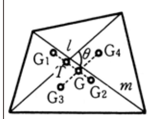
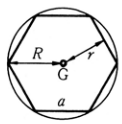
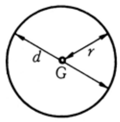
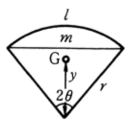
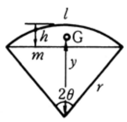
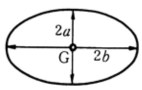
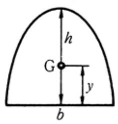
$$x_G=\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)\qquad y_G=\frac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)$$

□□□ ほっとコラム □□□

◆古代エジプト人は「π」の値を知っていた?

ピラミッドの4辺の和を高さの2倍で割ると、円周率「π」に近い値になることが知られているが、古代エジプト人がπの値を知っていたとは考え難い。その秘密は、「計測輪」という輪を転がして、その回転数によって距離を計測する、当時の測量方法に隠されている。輪の直径は1キュービット(約52.4cm)で、計測輪が1回転したときの距離は「πキュービット」。例えばクフ王の大ピラミッドの1辺は約230mだが、これは計測輪を140回転させた長さ(140πキュービット)に相当するのである。古代エジプト時代でも、時代によってはπを使った高度な設計がおこなわれていたといわれるが、それとピラミッドにおける不思議な数字の関係は、まったく別もののようだ。

平面図形の面積(A), 周長(L)および重心位置(G)

三角形		$A=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=\sqrt{l(l-a)(l-b)(l-c)}$ ただし　$2l=a+b+c$ $L=a+b+c$, $y=h/3$
平行四辺形		$A=ab\sin\theta=bh$ 菱　形………$a=b$ 矩　形……$\theta=\pi/2$ $L=2(a+b)$,　$y=h/2$
台形		$A=\frac{h}{2}(a+c)$,　$a//c$ $L=a+b+c+d$ $y=\frac{h(a+2c)}{3(a+c)}$
四辺形		$A=\frac{1}{2}lm\sin\theta$ 対角線 l により分けられた2つの三角形の重心をG_1, G_2, 対角線mによるそれらを G_3, G_4 とするとG_1, G_2とG_3G_4の交点がGとなる。 $G_1G_2//m$,　$G_3G_4//l$, $G_1T=GG_2$
正n角形		$A=\frac{nar}{2}=nr^2\tan\frac{\pi}{n}$ $=\frac{na^2}{4}\cot\frac{\pi}{n}=\frac{nR^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}$ $L=na$ $a=2\sqrt{R^2-r^2}$
円		$A=\pi r^2=\frac{\pi d^2}{4}$ $L=2\pi r=\pi d$
扇形		$A=\theta r^2=\frac{1}{2}lr$, 2θ:中心角(rad) $L=l+2r=2r(\theta+1)$ $y=\frac{2}{3}\frac{m}{l}r=\frac{2}{3}\frac{r\sin\theta}{\theta}=\frac{1}{3}\frac{m}{\theta}$
弓形		$A=\frac{1}{2}\{lr-m(r-h)\}=\frac{1}{2}r^2(2\theta-\sin2\theta)$ 2θ:中心角(rad), $h=r(1-\cos\theta)$ $m=2\sqrt{2rh-h^2}=2r\sin\theta$ $L=l+m=2r(\theta+\sin\theta)$ $y=m^3/12A=2r^3\sin^3\theta/3A$
楕円		$A=\pi ab$ $L=\pi(a+b)\left\{1+\frac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2+\frac{1}{64}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4+\frac{1}{256}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^6+\cdots\cdots\right\}$
放物形		$A=\frac{2}{3}bh$, $y=\frac{2}{5}h$ $L=b+\frac{b}{2c}\left\{c\sqrt{1+c^2}+\log(c+\sqrt{1+c^2})\right\}$ ただし　$c=4h/b$