平均自乗誤差

いま，物理量の真値をXとし，系統的誤差を完全になくしたあと，n回の直接測定によるその測定値をx_1，x_2，……，x_nとするとき，それらの算術平均値

$$x=\frac{x_1+x_2+\cdots\cdots+x_n}{n} \qquad (1)$$

がもっとも真値Xに近い値と考えられる。また，それぞれの測定値の誤差ε_1，ε_2……，ε_nは

$$\varepsilon_1=x_1-X,\quad \varepsilon_2=x_2-X,\quad \cdots\cdots,\quad \varepsilon_n=x_n-X \qquad (2)$$

となり，これらの誤差の2乗の和の平均値

$$\mu^2=\frac{1}{n}(\varepsilon_1{}^2+\varepsilon_2{}^2+\cdots\cdots+\varepsilon_n{}^2) \qquad (3)$$

を考え，その平方根μを平均自乗誤差と呼ぶ。それぞれの誤差が小さければ小さいほどμの値は小さくなるので，μが小さいほどこれら測定値の組は信頼してよいと考えられる。すなわち，μは各測定値の信頼度の評価を与えるものと考えてよいのである。

ところが，真値Xは知ることができないので，誤差ε_1，ε_2……，ε_nは計算することができない。したがって，平均自乗誤差も求められないので，そのため真値Xの代りに算術平均値xを用い，誤差の代りに残差δ_1，δ_2，……，δ_nをつぎのように定義する。

$$\delta_1=x_1-x,\quad \delta_2=x_2-x,\quad \cdots\cdots,\quad \delta_n=x_n-x \qquad (4)$$

ガウスの誤差の理論によれば，nが十分に大きいところでは，式(3)で定義された平均自乗誤差μは上式の残差を用いて，

$$\mu^2=\frac{\delta_1{}^2+\delta_2{}^2+\cdots\cdots+\delta_n{}^2}{n-1} \qquad (5)$$

のように計算される。ここで，分母がnでなく$n-1$であることに注意しよう。μは各測定値の信頼度を示す平均自乗誤差であり，n個の測定値の算術平均値xは，それよりもさらにn倍も信頼してもよいと考えられるので，

$$\mu_m{}^2=\frac{\mu^2}{n}=\frac{\delta_1{}^2+\delta_2{}^2+\cdots\cdots+\delta_n{}^2}{n(n-1)} \qquad (6)$$

をとり，μ_mを平均値の平均自乗誤差と定義する。すなわち，μ_mは算術平均値xの信頼度を与えるのである。平均自乗誤差のことをまた標準偏差と呼ぶ。

【例題】 針金の直径を測定して，つぎのような20個の測定値（単位mm）を得た。平均値およびその平均自乗誤差を求め，それらを表示せよ。

0.501，0.502，0.500，0.497，0.501，0.507，0.505，
0.499，0.502，0.501，0.494，0.505，0.500，0.501，
0.500，0.502，0.503，0.501，0.502，0.503

【解】 平均自乗誤差の計算は表のように計算すれば，間違いが少ないであろう。

平均自乗誤差の計算

測定回数	0.500からの差	残　差	残差の2乗×10^6
1	+ 0.001	− 0.0003	0.09
2	+ 0.002	+ 0.0007	0.49
3	0	− 0.0013	1.69
4	− 0.003	− 0.0043	18.49
5	+ 0.001	− 0.0003	0.09
6	+ 0.007	+ 0.0057	32.49
7	+ 0.005	+ 0.0037	13.69
8	− 0.001	− 0.0023	5.29
9	+ 0.002	+ 0.0007	0.49
10	+ 0.001	− 0.0003	0.09
11	− 0.006	− 0.0073	53.29
12	+ 0.005	+ 0.0037	13.69
13	0	− 0.0013	1.69
14	+ 0.001	− 0.0003	0.09
15	0	− 0.0013	1.69
16	+ 0.002	+ 0.0007	0.49
17	+ 0.003	+ 0.0017	2.89
18	+ 0.001	− 0.0003	0.09
19	+ 0.002	+ 0.0007	0.49
20	+ 0.003	+ 0.0017	2.89
平均値	+ 0.0013		$\Sigma=150.20\times10^{-6}$

すなわち，算術平均値は0.5013と求められる。

残差の2乗の和は150.2×10^{-6}であるから，μ_mは0.00063となる。

以上の結果を表現する場合に，平均値にその平均自乗誤差の値を付け加えて

$$0.50130\pm0.00063$$
（または0.5013 ± 0.0006）

間接測定における平均自乗誤差

物理量X，Y，Z，……を測定して

$$A=f(X,\ Y,\ Z,\ \cdots\cdots) \qquad (7)$$

の関係式から物理量Aを求める実験はかなり多い。この測定を間接測定と呼ぶ。この測定において，Xの測定値をx_1，x_2，……，x_1，Yの測定値をy_1，y_2，……，y_m，Zの測定値をz_1，z_2，……，z_n，……とし，それぞれの平均値をx，y，z，……とすれば，物理量Aのもっとも真値に近い値aは次式から求められる。

$$a=f(x,\ y,\ z,\ \cdots\cdots) \qquad (8)$$

また，aの信頼度を示す平均自乗誤差μ_mは次式から計算される。

$$\mu_m{}^2=\left(\frac{\partial A}{\partial X}\right)^2\mu_{mx}{}^2+\left(\frac{\partial A}{\partial Y}\right)^2\mu_{my}{}^2+\left(\frac{\partial A}{\partial Z}\right)^2\mu_{mz}{}^2+\cdots\cdots \qquad (9)$$

ここで，μ_{mx}，μ_{my}，μ_{mz}，……はそれぞれ式(6)から計算された平均値x，y，z，……の平均自乗誤差である。式(9)は誤差の伝播法則と呼ばれている。

前節と同様に平均値aに対しては，

$$a\pm\mu_m \qquad (10)$$

のように表現する。